$X = \{(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{N}^n \mid f(x_1, \dots x_n) > 0\}$ ← ricorsiva (parziale)

$= \{(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{N}^n \mid \exists n \ \langle x_1, \dots x_n \rangle = g(n)\}$

ric. totale

primitiva ricorsiva

Prop. Sia $X \subseteq \mathbb{N}^n$ $\quad \mathbb{N}^n - X$ ↓

X è decidibile $\iff$ X e $\overline{X}$ sono semidec.

$\Rightarrow$ ovvia.

Per

$\Leftarrow$ Sia

$(x_1, \dots x_n) \in X \iff \exists n \ \langle x_1 \dots x_n \rangle = f(n)$

$(x_1, \dots x_n) \in \overline{X} \iff \exists n \ \langle x_1 \dots x_n \rangle = g(n)$

$$h(x) = \mu_n \Big(\big(n \bmod 2 = 0 \ \wedge \ x = f(n \operatorname{div} 2) \big) \vee \big(n \bmod 2 = 1 \ \wedge \ x = g(n \operatorname{div} 2) \big) \Big) \bmod 2$$

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \langle x_1 \dots x_n \rangle \in X \\ 1 & \text{se } \langle x_1 \dots x_n \rangle \in \overline{X} \end{cases}$$

□

Prop. $H_1 := \{(a,x) \mid \varphi_1(a,x) \neq \perp\} \subseteq \mathbb{N}^2$

H_1 non è decidibile.

D.: Per assurdo

$$f(a,x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \varphi_1(a,x) \neq \perp \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$f(a,a) = 0$

$$g(a) = \begin{cases} \varphi_1(a,a) + 1 & \text{se } \varphi_1(a,a) \neq \perp \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$g(\ulcorner g \urcorner) = \begin{cases} g(\ulcorner g \urcorner) + 1 & \text{se } g(\ulcorner g \urcorner) \neq \perp \Leftarrow \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$g(\ulcorner g \urcorner) = 1$

Es H_1 è semidecidibile

Es $\overline{H_1}$ non è semidecidibile.

Es $TOT = \{ a \mid x \mapsto \nu_1(a, x) \text{ è totale} \}$

non è semid.

Es $\overline{TOT}$ non è semid.

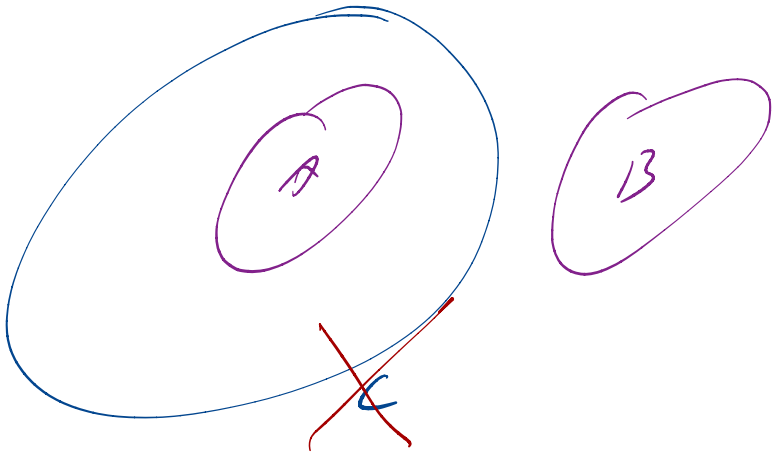
Rid.

$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ric. totale

$(a, x) \in H_1 \iff f(a, x) \in TOT$

Es. Esistono $A \cap B = \emptyset$, semidec. e inseparabili

$\neg \exists C$ decidibile $A \subseteq C \wedge B \cap C = \emptyset$



Gerarchia aritmetica

Fissiamo $\mathcal{N} := (\mathbb{N}; +, \cdot, S, 0)$

D.L $\forall x \leq t \; \varphi \overset{def}{\equiv} \forall x \; x \leq t \to \varphi$

$\forall x \left(\exists y \; x + y = t\right) \to \varphi$

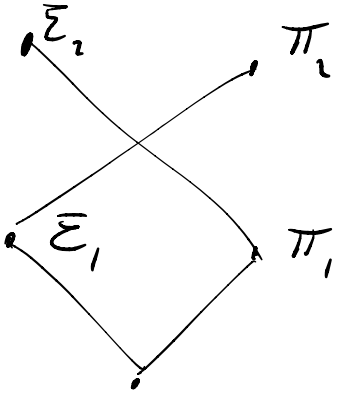
$\exists x \leq t \; \varphi \overset{def}{\equiv} \exists x \; x \leq t \wedge \varphi$

D.L φ f. aritmetica è di classe Δ_0^0 (sono sempre 0) se si compone di f. atomiche $\vee \wedge \neg$, e quant. limitati.

$\Delta_0^0 = \Sigma_0^0 = \Pi_0^0$

φ è di classe Σ_{n+1}^0 $\left(\Pi_{n+1}^0\right)$ se è della forma $\exists x_1 \ldots \exists x_k \; \psi$ con ψ di c. Π_n

$\left(\forall x_1 \ldots \forall x_k \; \psi \text{ con } \psi \text{ di c. } \Sigma_n\right)$



$\Delta_0 = \Sigma_0 = \Pi_0$

$\exists \bar{x} \; \Delta_0^0 = \Sigma_1^0$

$\forall \bar{y} \exists \bar{x} \; \Delta_0^0 = \Pi_2^0$

$\exists \bar{y} \forall \bar{x} \; \Delta_0^0 = \Sigma_2^0$

Oss Data φ aritmetica, $\exists \varphi$ nella gerarchia aritmetica t.c. $\vdash \varphi \leftrightarrow \exists \varphi$

Forma normale prenessa

Data una $\mathcal{L}$-formula φ esiste una ψ della forma

$$Q_1 a_1 \; Q_2 a_2 \; \dots \; Q_n a_n \; \theta$$

(Q_i: quantificatori; a_i: variabili; θ: senza quantif.)

tale che $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$

Dim

φ = $\longrightarrow$ atomica OK

$\rightarrow \exists x_- \quad \forall x_-$ OK

$\varphi_1 \wedge \varphi_2$

$\varphi_1 \vee \varphi_2$

$\neg \varphi_1$

} es. assumo φ_1, φ_2 in f. n. prenessa, e risolvo i vari casi.

□

Def Sia $X \subseteq \mathbb{N}^n$ aritmetico (def. in $(\mathbb{N}; S, +, \cdot, 0)$) diciamo che X è di classe Pippo se esiste φ di cl. Pippo. t. c. $(x_1 \dots x_n) \in X \iff \mathbb{N} \models \varphi(x_1 \dots x_n)$

Scopo $\quad \{(x_1, \dots, x_n) \mid p(x_1, \dots, x_n) = 0\}$

polinomiale $\subseteq \Delta^0_0 \subseteq$ p.r. $\subseteq$ decidibile $\subseteq$ semidecidibile $= \Sigma^0_1$

$\exists \Delta^0_0 = \Sigma^0_1$ $\quad \|$

$\exists$ polinom. $= \exists \Delta^0_0 = \exists$ p.r. $= \exists$ dec. $= \exists$ semid. $= \exists \Sigma^0_1$

disgiunto

Def $X \subseteq \mathbb{N}^n$ è di cl. Δ^0_n se X è sia Σ^0_n sia Π^0_n.

↖ ↗ LE FORMULE POSSONO ESSERE DIVERSE.

Prop X è decidibile $\iff X$ è Δ^0_1.

$$\text{primo}(x) = \forall y \le x \left(\exists z \le x \;\; z \cdot y = x\right) \to (y = x \vee y = 1)$$

$\forall n \exists x \quad \text{primo}(n + x) \wedge \text{primo}(n + x + ss(0))$

$(\exists x \varphi) \wedge (\exists y \psi) \equiv \exists x \exists y \; \varphi \wedge \psi \qquad \Sigma^0_1 \times \Sigma^0_1 = \Sigma^0_1$

$\neg(\exists x \varphi) \equiv \forall x \neg \varphi \qquad \neg \Sigma^0_1 = \Pi^0_1$

$$\Pi^0_n, \Sigma^1_n \subseteq \Pi^0_{n+1}, \Sigma^1_{n+1}$$

$$\forall x < t \; \varphi \quad (\Sigma^0_1) = \forall x < t \; \exists y \; \psi \quad (\Delta^0_0)$$

$$\forall x < t \; \exists y \; \psi$$

$$\exists \kappa \; \forall x < t \; \exists y < \kappa \; \psi$$