Teo Un sottoinsieme A di $\mathbb{N}^n$ è semidecidibile se e solo se è di complessità Σ_1^0.

Oss La classe degli insiemi Σ_n^0 è chiusa sotto

$\wedge \quad \vee \quad \exists (\leq t) \quad \forall x \leq t$

$\mathbb{N} \models \forall x \leq t \; \exists y \; \psi \iff \exists z \; \forall x \leq t \; \exists y \leq z \; \psi$

La classe degli insiemi Π_n^0 è chiusa sotto

$\wedge \quad \vee \quad \forall (\leq t) \quad \exists x \leq t$

Inoltre $\cdot \; \Sigma_n^0, \Pi_n^0 \subseteq \Sigma_{n+1}^0, \Pi_{n+1}^0$

$\cdot \; \forall \Sigma_n^0 = \Pi_{n+1}^0 \quad \exists \Pi_n^0 = \Sigma_{n+1}^0$

Dim (Teo)

semidec $\Rightarrow \Sigma_1^0$

Lemma Sia $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ ricorsiva. Allora esiste una formula φ Σ_1^0 t.c.

$f(x_1 \dots x_n) = y \iff \mathbb{N} \models \varphi(x_1 \dots x_n \; y)$

Dim Per induzione sulla def. di f.

- composizione

$$x = f(y) \iff \mathbb{N} \models \varphi(x,y)$$

$$y = g(z) \iff \mathbb{N} \models \psi(y,z)$$

$$x = f(g(z)) \iff \mathbb{N} \models \exists y\, \varphi(x,y) \wedge \psi(y,z)$$

- ricorsione primitiva

$$\begin{cases} f(x,0) = g(x) \\ f(x,y+1) = h(x,y,f(x,y)) \end{cases}$$

$f(x,y) = z \equiv \exists t_0 \dots t_y \quad t_0 = g(x) \wedge$

$\forall i < y \quad t_{i+1} = h(x,i,t_i) \wedge$

$t_y = z$

$\equiv \exists a, b \quad \beta(a,b,0) = g(x) \wedge$

$\forall i < y \quad \beta(a,b,s(i)) = h(x,i,\beta(a,b,i)) \wedge$

$\beta(a,b,y) = z$

- $f(x) = \mu_y \left(g(x,y) = 0 \right)$

f $\Downarrow$

$$g(x,z) = 0 \;\wedge\; \forall t < z \;\; g(x,t) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$\exists u \;\; g(x,t) = u \;\wedge\; u \neq 0$$

Δ_1^0

<u>Lemma</u> esiste una funzione $\beta : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ tale che per ogni n, per ogni $x_0 \dots x_{n-1}$ esistono a, b tali che

$$\forall i < n \qquad \beta(a,b,i) = x_i$$

<u>Dim</u>

$$\beta(a,b,i) = a \bmod \left(b(i+1) + 1 \right)$$

$$\begin{cases} a \bmod (b+1) = x_0 \\ a \bmod (2b+1) = x_1 \\ \vdots \\ a \bmod (nb+1) = x_n \end{cases}$$

Se $b+1 \dots nb+1$ sono primi fra loro e $b+1 \dots nb+1 > x_0 \dots x_n$ ho vinto.

$b = (n!)^n \qquad b > x_0 \dots x_n$

$p \mid b(i+1)+1 \qquad p \mid b(j+1)+1$

$p \mid b(i-j) \Rightarrow p \mid b$

$\Downarrow$

$p \mid b(i+1)$

$\underbrace{\beta(a,b,i)}_{x} = a \bmod (b(i+1)+1)$

$x < b(i+1)+1 \wedge \exists t \; t\cdot(b(i+1)+1)+x = a$

$\exists t \; x+(t+1) = b(i+1)+1$

$\square$

$\Leftarrow$

Lemma Se $S \subseteq \mathbb{N}^n$ è di classe Δ_0 allora esiste

$f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ p.r. t.c.

$x_1 \dots x_n \in S \iff f(x_1 \dots x_n) = 0$

Dim

- $p(x_1 \dots x_n) = q(y_1 \dots y_n)$

$(p \dot{-} q) + (q \dot{-} p) = 0$

- $f(x_1 \dots x_n) = 0$ ou $g(x_1 \dots x_n) = 0$

  $f(\ ) \cdot g(\ ) = 0$

- $\neg f(x_1 \dots x_n) = 0$

  $1 \dot{-} f(x_1 \dots x_n) = 0$

- $\forall x < t \quad f(x, y_1 \dots y_n) = 0$

  $\#\{x < t \mid f(x, y_1 \dots y_n) \neq 0\} = 0$

$\square$

$$\varphi(x_1 \dots x_n) = \exists y_1 \dots y_n \underbrace{\psi(y_1 \dots y_n, x_1 \dots x_n)}_{\Delta_0^0}$$

$$f(y_1 \dots y_n, x_1 \dots x_n) = 0$$

↖ p.r.

$$g(x_1 \dots x_n) = \text{cost.} \downarrow 0 \mid \mu_t \underbrace{\left(f(\mathrm{nth}(0,t), \dots, \mathrm{nth}(n-1,t), x_1 \dots x_n) = 0\right)}_{\text{p.r.}}$$

$\square$

Cor La proposition $P(\ulcorner \varphi \urcorner) = \text{“}\mathbb{N} \models \varphi\text{”}$ n'est pas décidable.

Rem Si φ une f. arithmétique telle que

$$v_1(x, y) = z \iff \mathbb{N} \models \varphi(x, y, z)$$

$(x,y) \in H_1 \iff \mathbb{N} \models \exists z\, \varphi(x,y,z)$

$\square$

$\underline{C_5}$ — non è semidecidibile.