Lemma (Lemma di diagonalizzazione di Gödel)

Data una formula aritmetica φ esiste una formula aritmetica ψ tale che

$$Q \vdash \psi \leftrightarrow \varphi[\overline{\ulcorner \psi \urcorner}/x_1]$$

$$\vdots$$

$$\varphi(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})$$

$$\varphi \in T \iff \mathbb{N} \models P(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

(P: decidibile)

Lemma Data T ricorsivamente assiomatizzata esiste un predicato ricorsivo $Dim_T(x, y)$ t.c.

$$T \vdash \varphi \iff \mathbb{N} \models \exists d\, Dim_T(d, \ulcorner \varphi \urcorner)$$

Dim

$d = \langle \varphi_0 \dots \varphi_n \rangle$ è una dimostrazione di φ se

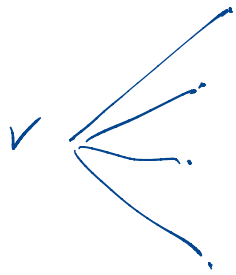
- $\varphi_n = \varphi \leftarrow nth(lenght(d) \dot{-} 1, d) = \ulcorner \varphi \urcorner$
- $\forall i \leq lenght(d)$ ($lenght(d) \leq d$)
  - φ_i è un assioma ← ricorsivo per ipotesi
  - o φ_i si ottiene dalle φ precedenti *
    mediante una regola di deduzione

$\forall i \leq lenght(d)$ ...

$\forall i \leq d\ (i \leq lenght(d)) \rightarrow \dots$

* φ_i si ottiene dalle φ precedenti mediante una regola di deduzione

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$$



$\exists j < i \ \exists k < i \ \ldots$

$\varphi_j = \varphi_k \to \varphi_i$

$\ulcorner \varphi_j \urcorner = \langle \#\to, \ulcorner \varphi_k \urcorner, \ulcorner \varphi_i \urcorner \rangle$

$x \qquad\qquad y \quad z$

Teo (Primo t. di incompletezza di Gödel)

Sia T ric. assiomatizzabile (nel linguaggio $+, \cdot, S, 0$)

t.c. $T \vdash Q$ e $\mathbb{N} \models T$. Allora T è incompleta.

Ossia esiste φ t.c. $T \nvdash \varphi$ e $T \nvdash \neg\varphi$.

Dim

Grazie al lemma di diagonalizz. applicato a

$$\varphi \equiv \neg \exists d \ Dim_T(d, x_1)$$

Troviamo γ t.c.

$$Q \vdash \gamma \longleftrightarrow \neg \exists d \ Dim_T(d, \ulcorner \gamma \urcorner)$$

Dico che $T \nvdash \gamma$ $\quad$ $T \nvdash \neg\gamma$

Per assurdo, assumo $T \vdash \gamma$

$$\mathbb{N} \models \underbrace{\exists d \; Dim_T(d, \ulcorner \gamma \urcorner)}_{\Sigma_1^0}$$

$$\begin{cases} Q \vdash \exists d \; Dim_T(d, \ulcorner \gamma \urcorner) \\ Q \vdash \gamma \leftrightarrow \neg \exists d \; Dim_T(d, \ulcorner \gamma \urcorner) \\ Q \vdash \neg \gamma \rightarrow T \vdash \neg \gamma \end{cases}$$

$\lightning$

Per assurdo $T \vdash \neg \gamma$ $\rightarrow \mathbb{N} \models T$

$$\begin{cases} \mathbb{N} \models \neg \gamma \\ \mathbb{N} \models \gamma \leftrightarrow \neg \exists d \; Dim_T(d, \ulcorner \gamma \urcorner) \\ \rightarrow \mathbb{N} \models \exists d \; Dim_T(d, \ulcorner \gamma \urcorner) \end{cases}$$

$T \vdash \gamma$

$\lightning$

$\blacksquare$

Teo (Rosser)

Sia T ric. assiomatizzabile (nel linguaggio $+, \cdot, S, 0$)

t.c. $T \vdash Q$ e $T \not\vdash \bot$. Allora T è incompleta.

Ossia esiste φ t.c. $T \not\vdash \varphi$ e $T \not\vdash \neg\varphi$.

Dim

Costruisco ψ t.c.

$$Q \vdash \psi \leftrightarrow \forall d\ Dim_T(d, \ulcorner\psi\urcorner) \to \exists d' \le d\ Dim_T(d', \ulcorner\neg\psi\urcorner)$$

applicando la diagon. a

$$\varphi \equiv \forall d\ Dim(d, x_1) \to \exists d' \le d\ Dim_T(d', Neg(x_1))$$

$$x \longmapsto \langle \#\neg, x \rangle$$

dettagli: esercizio. ∎

Prop Sia T una teoria decidibile. Allora esiste T' completa e decidibile con $T \subseteq T'$.

Dim (idea)

Do un algoritmo che enumera la congiunzione di T'.

Al passo n produco la formula φ_n così fatta

- Considero ψ t.c. $\ulcorner \psi \urcorner = n$.
- Uso la decidibilità di T per capire se

$$T, \varphi_0 \dots \varphi_{n-1} \vdash \neg \psi$$

$$\Updownarrow$$

$$T \vdash (\varphi_0 \wedge \dots \wedge \varphi_{n-1}) \to \neg \psi$$

- Se sì $\varphi_n \equiv 0 = 0$
- Se no $\varphi_n \equiv \psi$ ∎

Corollario

- Q, PA non sono decidibili.
- $\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \mathbb{N} \models \varphi\}$ non è ricorsivo ric. enumerabile.

- La teoria vuota nel ling. $\{+, \cdot, S, 0\}$ non è decidibile.

$$Q \vdash \varphi$$
$$\Downarrow$$
$$\vdash (Q_1 \wedge \dots \wedge Q_7) \to \varphi$$

$$\Box\varphi \overset{\text{def.}}{\equiv} \exists d \; Dim_{PA}(d, \ulcorner\varphi\urcorner)$$

- $PA \vdash \varphi \Rightarrow PA \vdash \Box\varphi$
- $PA \vdash \Box\varphi \to \Box(\Box\varphi)$
- $PA \vdash (\Box\varphi \wedge \Box(\varphi \to \psi)) \to \Box\psi$

Dalle precedenti segue che

$PA \vdash \gamma \leftrightarrow \neg\Box\bot$ — "PA è coerente"

$PA \vdash \gamma \leftrightarrow \neg\Box\gamma$ $\qquad$ $PA \not\vdash \gamma$

- $PA \vdash \gamma \to \neg\Box\bot$

$PA \vdash \bot \to \gamma$) I

$PA \vdash \Box(\bot \to \gamma)$) III

$PA \vdash \Box\bot \to \Box\gamma$

$$PA \vdash \neg\Box\gamma \to \neg\Box\bot$$
$$P\theta \vdash \gamma \to \neg\Box\bot$$

- $PA \vdash \neg\gamma \to \Box\bot$

$$PA \vdash \gamma \leftrightarrow \neg\Box\gamma$$
$$PA \vdash \Box\gamma \to \neg\gamma$$
$$PA \vdash \Box(\Box\gamma \to \neg\gamma) \quad \text{I, III}$$
$$PA \vdash \Box\Box\gamma \to \Box\neg\gamma$$
$$P\theta \vdash \Box\gamma \to \Box\Box\gamma \quad \text{II}$$
$$P\theta \vdash \Box\gamma \to \Box\neg\gamma \quad \Box(\gamma \to \bot) \quad \text{III}$$
$$PA \vdash \Box\gamma \to \Box\bot$$
$$PA \vdash \neg\gamma \to \Box\bot$$

Qr