Lemma Sia $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ una funzione ricorsiva totale. Allora esiste una formula φ di classe Σ^0_1 tale che

$$\forall x_1 \dots x_k \in \mathbb{N} \quad Q \vdash \forall y \; \varphi(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k, y) \leftrightarrow y = \overline{f(x_1 \dots x_k)}$$

Dim Sia ψ di classe Δ^0_1 tale che per ogni $x_1 \dots x_k, y \in \mathbb{N}$

$$y = f(x_1 \dots x_k) \iff Q \vdash \exists z_1 \dots z_l \; \psi(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k, \bar{y}, z_1 \dots z_l)$$

Consideriamo

$\varphi(x_1 \dots x_k, y) \overset{\text{def}}{\equiv}$ Chiamiamo tutto questo $\theta_1 \wedge \theta_2$

$$\exists N \Big(\big(\exists z_1 \le N \dots z_l \le N \;\; y \le N \wedge \psi(x_1 \dots x_k, y, z_1 \dots z_l) \big) \wedge \big(\forall z_1 \le N \dots z_l \le N, \; t \le N \;\; \psi(x_1 \dots x_k, t, z_1 \dots z_l) \to t = y \big) \Big)$$

Dimostriamo separatamente le due implicazioni nell'asserto.

$\Rightarrow$ $Q \vdash \forall y \; \varphi(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k, y) \to y = \overline{f(x_1 \dots x_k)}$

Supponiamo, per assurdo, che non sia così e fissiamo $x_1 \dots x_k$ e un modello $M \models Q$ in cui esiste $y \neq f(x_1 \dots x_k)$ tale che

$$M \models \varphi(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k, y)$$

Siccome φ è $\exists N \; \theta_1 \wedge \theta_2$, possiamo fissare $N \in M$ tale che $x_1 \dots x_k, y, N$ soddisfino, in M, le formule θ_1 e θ_2. Si presentano, ora, due casi: o N è standard, o no.

Se N è standard, per Q_1, ossia

$$M \models \exists z_1 \leq N \dots z_l \leq N \quad y \leq N \wedge \psi(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k, y, z_1 \dots z_l)$$

anche y è standard, e ci sono $z_1 \dots z_l \in M$ tutti standard tali che $M \models \psi(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k, y, z_1 \dots z_l)$. Siccome ψ è di classe Δ_0, quindi decidibile, abbiamo $Q \vdash \psi(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k, \bar{y}, \bar{z}_1 \dots \bar{z}_l)$, però, per costruzione, questo implica $y = f(x_1 \dots x_k)$ ↝

Se N è non standard, Q_2 dice che

$$M \models \forall z_1 \leq N \dots z_l \leq N,\ t \leq N \quad \psi(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k, t, z_1 \dots z_l) \to t = y$$

Per costruzione ci sono $z_1 \dots z_l$ standard tali che

$$Q \vdash \psi(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k, \overline{f(x_1 \dots x_k)}, \bar{z}_1 \dots \bar{z}_l)$$

Siccome $M \models$ standard qualsiasi $\leq N$, ponendo $t = f(x_1 \dots x_k)$, i numeri $z_1 \dots z_l, t$ soddisfano la premessa in Q_2 per cui abbiamo $M \models \overline{f(x_1 \dots x_k)} = y$ ↝

$\leftarrow$ $Q \vdash \forall y \; y = \overline{f(x_1 \dots x_k)} \to \varphi(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k, y)$

Ossia $Q \vdash \varphi(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k, \overline{f(x_1 \dots x_k)})$

Fissiamo $z_1 \dots z_l$ tali che $Q \vdash \psi(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k, \overline{f(x_1 \dots x_k)}, \bar{z}_1 \dots \bar{z}_l)$ e consideriamo $N = \max(f(x_1 \dots x_k), z_1 \dots z_l)$. Dobbiamo verificare che, fissato un qualunque $M \models Q$, i numeri

N e $y = f(x_1 \dots x_k)$ soddisfano θ_1 e θ_2 in M.
Per quanto riguarda θ_1, i quantificatori esistenziali

$$M \models \exists z_1 \le \bar{N} \dots z_l \le \bar{N} \quad \bar{y} \le \bar{N} \wedge \psi(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k, \bar{y}, z_1 \dots z_l)$$

sono semplicemente testimoniati dai numeri $z_1 \dots z_l$ fissati in precedenza.
Per quanto riguarda θ_2, dobbiamo mostrare

$$M \models \forall z_1 \le \bar{N} \dots z_l \le \bar{N}, t \le \bar{N} \quad \psi(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k, t, z_1 \dots z_l) \to t = \overline{f(x_1 \dots x_k)}$$

Ossia, dati $z_1 \dots z_l, t \in M$ tali che

$$M \models z_1 \le \bar{N} \wedge \dots \wedge z_l \le \bar{N} \wedge t \le \bar{N} \wedge \psi(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k, t, z_1 \dots z_l)$$

dobbiamo dire che necessariamente $M \models t = \overline{f(x_1 \dots x_k)}$. Però le disuguaglianze $M \models z_1 \dots z_l, t \le \bar{N}$ implicano che $z_1 \dots z_l, t$ sono standard. La premessa, quindi, implica

$$M \models \psi(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k, \bar{t}, \bar{z}_1 \dots \bar{z}_l)$$

da cui la tesi per la costruzione di ψ.

∎

Lemma (Lemma di diagonalizzazione di Gödel)

Data una formula aritmetica φ esiste una formula aritmetica ψ tale che

$$Q \vdash \psi \leftrightarrow \varphi[\overline{\ulcorner \psi \urcorner} / x_1]$$

Dim Per burocrazia, fissiamo $x_k \notin vl(\varphi)$.
Consideriamo la funzione primitiva ricorsiva

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto Sub(x, k, Num(x)) \\ \text{ossia } \ulcorner \alpha \urcorner &\longmapsto \ulcorner \alpha[\overline{\ulcorner \alpha \urcorner} / x_k] \urcorner \end{aligned}$$

che manda il numero di Gödel di una formula α, nel numero di Gödel della formula che si ottiene rimpiazzando, in α, la variabile x_k con $\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}$ — formula che, intuitivamente, possiamo pensare come $\alpha(\alpha)$.
Sia π una formula con $vl(\pi) \subseteq \{x_1, x_k\}$ tale che

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad Q \vdash \forall x_1 \ \pi[\overline{x} / x_k] \leftrightarrow x_1 = \overline{f(x)}$$

Definiamo $\theta \overset{def.}{\equiv} \forall x_1 \ \pi \rightarrow \varphi$ e $\psi \overset{def.}{\equiv} \theta[\overline{\ulcorner \theta \urcorner} / x_k]$.
Intuitivamente $\theta(\alpha) = \theta[\alpha / x_k]$ dice $\varphi(f(\alpha))$ ossia $\varphi(\alpha(\alpha))$.
Quindi $\psi = \theta(\theta)$ dice $\varphi(\theta(\theta))$ ossia $\varphi(\psi)$ come vorrebbesi dimostrare.

Verifichiamo che ψ soddisfa effettivamente l'asserto.
Per la costruzione di π abbiamo

$$Q \vdash \pi[\overline{\ulcorner\theta\urcorner}/x_k] \leftrightarrow x_1 = \overline{f(\ulcorner\theta\urcorner)}$$

E, per definizione $f(\ulcorner\theta\urcorner) = \ulcorner\theta[\overline{\ulcorner\theta\urcorner}/x_k]\urcorner = \ulcorner\psi\urcorner$, quindi

$$Q \vdash \pi[\overline{\ulcorner\theta\urcorner}/x_k] \leftrightarrow x_1 = \overline{\ulcorner\psi\urcorner}$$

(questa è, letteralmente, la medesima formula di prima).
La formula $\psi \equiv (\forall x_1\ \pi \to \varphi)[\overline{\ulcorner\theta\urcorner}/x_k]$, sfruttando il fatto che x_k non è libera in φ, è

$$\psi \equiv \forall x_1\ \pi[\overline{\ulcorner\theta\urcorner}/x_k] \to \varphi$$

Per via dell'equivalenza precedente.

$$Q \vdash \psi \leftrightarrow \forall x_1\ x_1 = \overline{\ulcorner\psi\urcorner} \to \varphi$$

Ossia $Q \vdash \psi \leftrightarrow \varphi[\overline{\ulcorner\psi\urcorner}/x_1]$

∎